Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Cycle 3 – Réponses temporelles des systèmes.

Table des matières

Objectifs

- Déterminer la réponse temporelle
- Identifier les paramètres caractéristiques d'un modèle du premier ordre ou du deuxième ordre à partir de sa réponse indicielle

Prévision de la réponse d'un système.

I

Un système peut être mathématiquement représenté par sa fonction de transfert, fraction rationnelle exprimant le rapport entre l'entrée et la sortie du système, dans le domaine de Laplace. En effet, ayant traduit les diverses fonctions d'entrées imaginables e(t) par leurs transformées $E(p)$, il sera aisé d'en déduire la sortie $S(p)$ et par transformée inverse, la réponse $s(t)$ à la commande.

De nombreux signaux de commande peuvent être décrits comme la superposition des fonctions échelon unitaire et rampe unitaire, plus ou moins retardées dans le temps. Il semble donc indispensable de connaître (*par cœur en CPGE*), les transformées de Laplace de ces signaux, ainsi que de quelques autres, que vous trouverez dans le tableau final de ce cours.

Vocabulaire :

- on appelle *réponse indicielle* la réponse d'un système à une fonction échelon.
- on appelle *réponse impulsionnelle* la réponse d'un système à une fonction dirac.

1. Exemple détermination de la réponse indicielle du régulateur de vitesse par l'utilisation de la transformée de Laplace

Nous avions montré que l'équation différentielle modélisant le comportement dynamique du véhicule était la suivante :

$$m \cdot \frac{dv(t)}{dt} + f_V \cdot v(t) = F_{mot}(t)$$

avec $V(0) = 0$ et $F_{mot}(t) = F_{mot} = Cte$ pour $t > 0$

Résolvons cette équation différentielle à l'aide de la transformée de Laplace :

Nous devons tout d'abord appliquer le transformée de Laplace sur cette équation sachant que la condition initiale est nulle :

$$m \cdot p \cdot V(p) + f_V \cdot V(p) = F_{mot}(p)$$

or $F_{mot}(p) = \dfrac{F_{mot}}{p}$

On obtient donc :

$$V(p) = \frac{F_{mot}}{p \cdot (m \cdot p + f_V)} = \frac{F_{mot}/m}{p \cdot (p + f_V/m)}$$

Il faut ensuite pour pouvoir identifier une forme connue dans Laplace faire une décomposition en élément simple :

$$V(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(p + f_V/m)}$$

Par une mise au même dénominateur et une identification on obtient :

- $\alpha = f_{mot}/f_v$
- $\beta = -f_{mot}/f_v$

Donc :

$$V(p) = \frac{F_{mot}}{f_V} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{(p + f_V/m)}$$

En utilisant le tableau des transformées de Laplace usuelles dans l'annexe en fin de cours on obtient le résultat final :

$$v(t) = \frac{F_{mot}}{f_V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{f_V}{m}t}\right)$$

Nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de résoudre systématiquement l'équation différentielle pour obtenir la solution analytique temporelle. Les performances peuvent être déduites de la fonction de transfert.

2. Utilisation de la fonction de transfert d'un système pour déterminer ses performances

Nous étudierons dans ce paragraphe les performances du système asservi décrit par le schéma bloc ci-dessous :

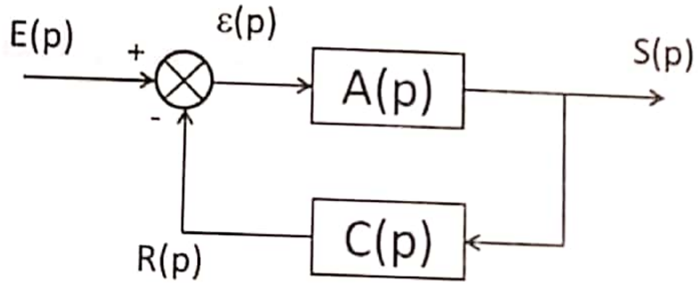


Schéma bloc d'un système asservi.

Sa fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ est telle que :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)C(p)} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Cette fonction de transfert étant une fraction rationnelle de deux polynômes, il est possible de l'exprimer sous la forme :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m(p - z_m)(p - z_{m-1})...(p - z_1)}{b_n(p - p_n)(p - p_{m-1})...(p - p_1)}$$

Stabilité du système

Un système bouclé est stable si et seulement si *sa sortie* $s(t)$ *reste bornée en réponse à un signal d'entrée borné* $e(t)$. La stabilité est une condition indispensable de fonctionnement d'un système asservi, l'instabilité étant en général synonyme de destruction du système.

Fondamental : Énoncé mathématique du critère de stabilité :

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée *possède UNIQUEMENT des pôles à partie réelle STRICTEMENT négative.*

Remarque

Ce critère mathématique est inconditionnel et valable pour tous les systèmes asservis. Cependant, son utilisation présente plusieurs inconvénients (nécessite le calcul de la fonction de transfert et des pôles). Des critères alternatifs basés sur des méthodes algébriques ou graphiques seront étudiés en deuxième année.

Si le système est stable, le signal de sortie $s(t)$ en réponse à une entrée bornée $e(t)$ converge vers une valeur finie s_∞. On appelle régime permanent l'état du système lorsque $t \to +\infty$. Cependant, les performances du système sont aussi liées à la façon dont la fonction s(t) tend vers cette valeur s_∞. On appelle régime transitoire d'un système l'état de ce système à un instant donné $t \in [0\,; +\infty[$.

Précision du système

Dans le cadre des cours de commande des systèmes en CPGE, nous n'étudierons que les performances de précision en régime permanent des systèmes, c'est-à-dire la précision en régime permanent, lorsque $t \to +\infty$.

Définition

La précision d'un système est la valeur vers laquelle tend l'écart $\epsilon(t)$, résultat de la comparaison entre la consigne $e(t)$ et le signal de retour $r(t)$ quand $t \to +\infty$. D'où l'expression de la précision en régime permanent ϵ_S :

$$\epsilon_S = \lim_{t\to+\infty} \epsilon(t) = \lim_{t\to+\infty} (e(t) - r(t))$$

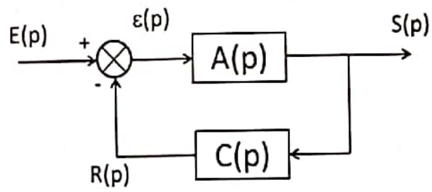


Schéma bloc d'un système asservi.

Méthode

Cet écart peut être facilement déterminé à partir de l'expression de la fonction de transfert $H(p)$ du système, si le système est stable, le théorème de la valeur finale peut être utilisé :

$$\epsilon_S = \lim_{t\to+\infty} \epsilon(t) = \lim_{p\to0} p.\epsilon(p) = \lim_{p\to0} (p\,[E(p) - R(p)])$$

Or, $R(p) = S(p).C(p)$ et $\dfrac{S(p)}{E(p)} = H(p)$, d'où :

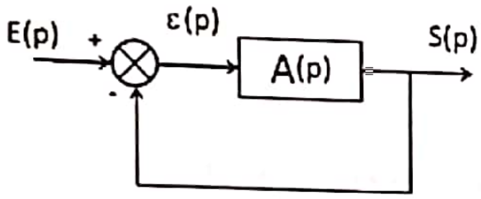
$$\epsilon_S = \lim_{p\to0} p.E(p)\,[1 - H(p).C(p)]$$

On peut noter que l'expression de la précision du système dépend de l'entrée $E(p)$ qui lui est appliquée. On distingue généralement deux performances de précision :

- *L'erreur statique* (ϵ_0) : erreur statique du système en réponse à une consigne de type échelon. Pour l'exprimer, il suffit de remplacer la fonction $E(p)$ par son expression $E(p) = \frac{e_0}{p}$. L'erreur indicielle est souvent donnée en pourcentage relativement à l'amplitude de l'échelon d'entrée : $\epsilon_0\% = \frac{\epsilon_0}{e_0} \cdot 100$.
- *L'erreur de traînage ou de poursuite* (ϵ_1) : erreur statique du système en réponse à une consigne en rampe. Pour l'exprimer, il suffit de remplacer la fonction $E(p)$ par son expression $E(p) = \frac{e_0}{p^2}$

Remarque

Dans certains cas, lorsque le système le permet, il est possible de déterminer la précision d'un système à partir de la comparaison entre la sortie du système et la valeur de la consigne lui ayant été appliquée. Cependant, il faut être vigilant et seules des grandeurs physiques de même nature peuvent être comparées. Ceci est particulièrement vrai dans le cas d'un système à retour unitaire, comme le montre l'exemple suivant.



Si les grandeurs physiques $e(t)$ et $s(t)$ sont identiques, il est possible de les comparer, et donc de déterminer l'erreur du système :

$$\epsilon_S = \lim_{t\to+\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p\to 0} p.(E(p) - S(p))$$

Soit : $\epsilon_S = \lim_{p\to 0} p.E(p) - \lim_{p\to 0} p.S(p)$

Rapidité du système

La rapidité du système est la caractéristique représentant la durée du régime transitoire d'un système linéaire. En théorie, cette durée est infinie (fin du régime transitoire en $t\to+\infty$). Il est donc nécessaire de définir des paramètres qui permettent une évaluation pratique de cette durée.

Le temps de réponse à 5% ($tr_{5\%}$) correspond à la durée nécessaire pour que la sortie reste dans un intervalle de ±5% autour de la valeur finale

Dans le cas d'un système stable soumis à une entrée en échelon, la réponse tend vers une valeur finie notée s_∞. Le temps de réponse à 5% est alors défini de la façon suivante :

$$\forall t > tr_{5\%}, 0,95.s_\infty < s(t) < 1,05.s_\infty$$

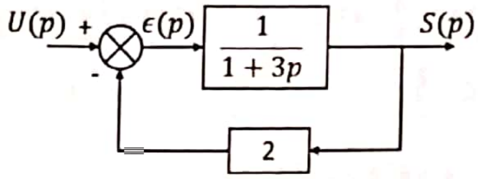
Dans l'état actuel de nos connaissances en commande des systèmes, la détermination de la rapidité d'un système nécessite le calcul de sa réponse temporelle $s(t)$. L'étude du comportement de systèmes standard dans la suite de ce cours nous permettra de mettre en place des abaques permettant de s'épargner ce calcul dans de nombreux cas.

Limitation du dépassement

Comme dans le cas de la rapidité, l'état actuel de nos connaissances ne nous permet pas de déterminer la valeur du dépassement pour un système quelconque sans calculer sa réponse temporelle $s(t)$. La limitation du dépassement sera étudiée lors de l'étude de deux types de systèmes usuels.

3. Exercice : Calcul de l'erreur statique

Soit un système dont le schéma bloc est le suivant :



Système

Question

[solution n°1 p.30]

Calculer l'erreur statique de ce système en pourcentage.

Indice :

Exprimer $\epsilon(p)$ en fonction de $E(p)$ puis calculer $\epsilon(t)$ à l'aide du théorème de la valeur finale avec $E(p) = \dfrac{e_0}{p}$.

$$\epsilon_s = \lim_{t \to \infty} \overbrace{(e(t) - 2s(t))}^{\epsilon(t)}$$

système stable : $\dfrac{S(p)}{U(p)} = \dfrac{\frac{1}{1+3p}}{1+\frac{2}{1+3p}} = \dfrac{1}{3+3p} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+p}$

$$= \lim_{p \to 0} p\,E(p) - 2pS(p)$$

$$= \lim_{p \to 0} p\left(E(p) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+p} E(p)\right)$$

$$= \lim_{p \to 0} e_0\left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+p}\right)$$

$$\boxed{\epsilon_s = \frac{1}{3} e_0}$$

$\rightarrow \boxed{\epsilon_s\% = 33{,}33\%}$

Réponses temporelles des systèmes linéaires du premier ordre.

II

1. Introduction

Équation temporelle

Un système linéaire est dit du premier ordre standard s'il est régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$s(t) + \tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} = K \cdot e(t)$$

Avec K et τ les deux constantes caractéristiques du comportement du système :

- K = gain statique , son unité dépendant de l'unité des grandeurs d'entrée et de sortie du système
- τ = constante de temps , en secondes

Remarque : l'appellation "gain statique" est justifiée par le comportement statique du système. En effet, si les entrée et sortie sont constantes, l'équation différentielle devient $s + 0 = K.e$ d'où en statique, $K = \frac{s}{e}$.

Fonction de transfert

La transformée de Laplace conduit à (conditions initiales nulles) : $S(p) + \tau.p.S(p) = K.E(p)$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Cette forme de la fonction de transfert est appelée forme canonique (forme pour laquelle le monôme de degré zéro du polynôme du dénominateur vaut 1). Ses paramètres caractéristiques sont K et τ.

2. Réponse indicielle (réponse à un échelon non unitaire)

On applique en entrée du système du premier ordre la fonction $e(t) = e_0.H(t)$. Sa transformée de Laplace s'écrit $E(p) = e_0/p$ et la sortie dans le domaine de Laplace vaut alors :

$$S(p) = \frac{e_0}{p}\frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

La transformée de Laplace inverse de la sortie (pour revenir en temporel) se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. Il faut préalablement la décomposer en éléments simples pour faire apparaître les éléments du tableau :

$$S(p) = \frac{e_0}{p}\frac{K}{1+\tau \cdot p} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+\tau p}$$

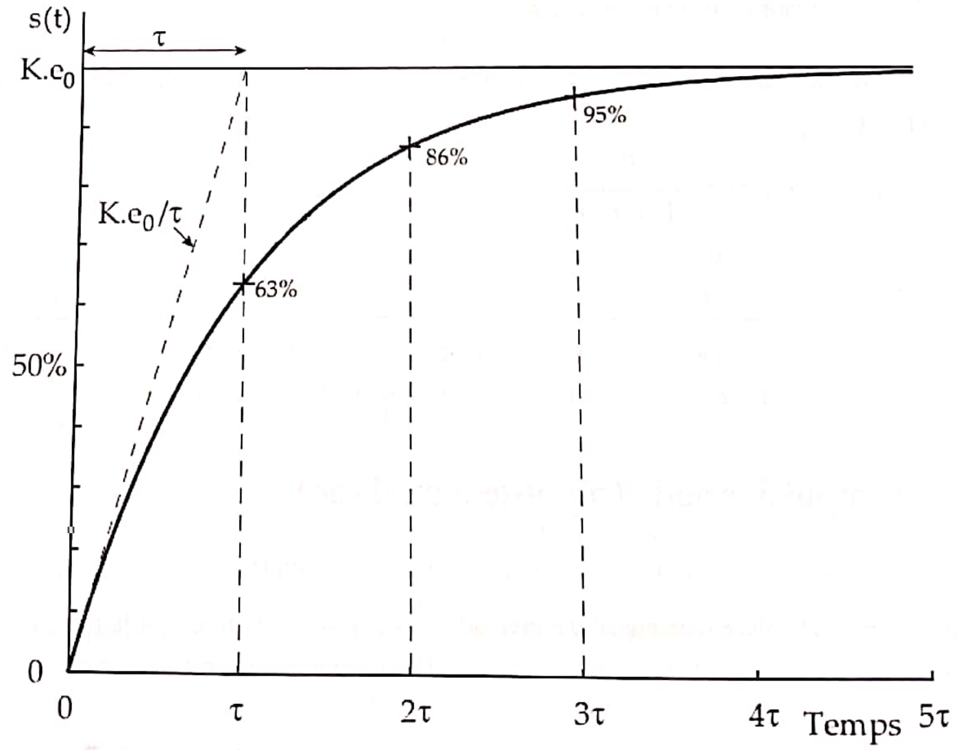
Les constantes α et β sont déterminées par identification : $\alpha = K.e_0$ et $\beta = -K.e_0.\tau$. D'où :

$$S(p) = K.e_0\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau.p}\right) = K.e_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right).$$

La transformée inverse de Laplace en utilisant le tableau de l'annexe donne :

$$s(t) = K.e_0.[1 - e^{-t/\tau}].H(t)$$

Fondamental : Réponse indicielle du premier ordre



Réponse indicielle d'un système du premier ordre

Cette réponse est tracée sur la figure précédente. Elle présente les propriétés suivantes :

- La pente à l'origine vaut $K.e_0/\tau$. Cette pente non nulle à l'origine est typique d'un premier ordre.
- La valeur à convergence (quand $t \longrightarrow \infty$) vaut $K.e_0$ (réponse statique ou permanente).
- Pour $t = \tau, s(\tau) = K.e_0.(1 - e^{-1}) \approx 0,63.K.e_0$
- Pour $t = 3.\tau, s(3.\tau) = K.e_0.(1 - e^{-3}) \approx 0,95.K.e_0$ (valeur à convergence moins 5%)

$$S(p) = \frac{e_0}{p}\frac{K}{1+\tau \cdot p} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+\tau p}$$

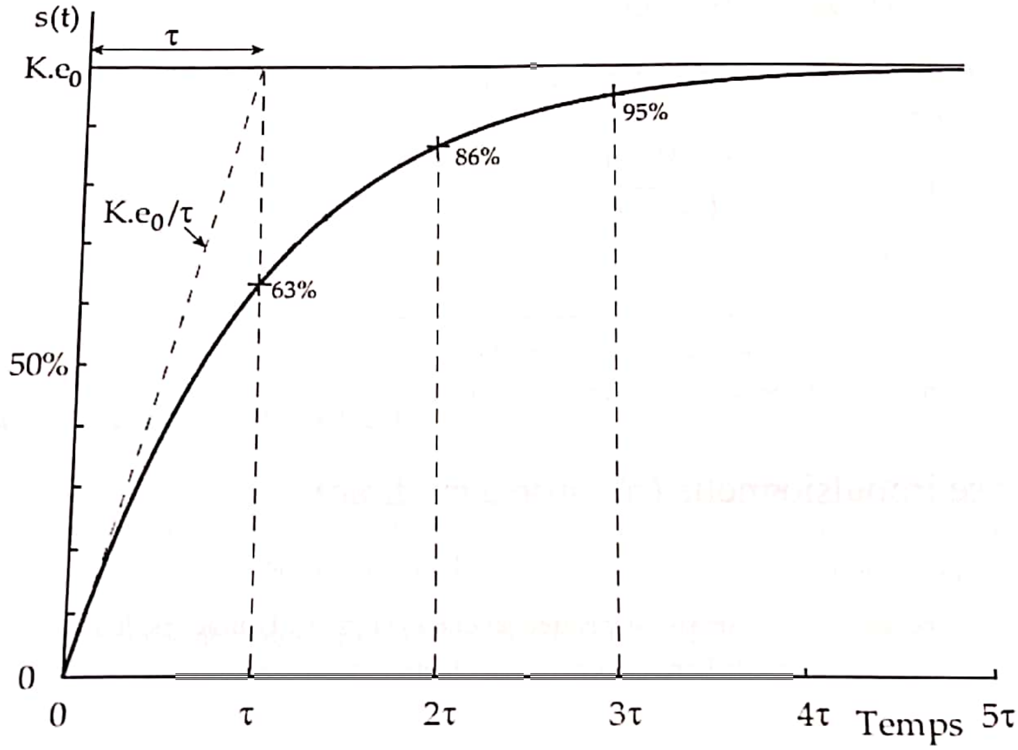
Les constantes α et β sont déterminées par identification : $\alpha = K.e_0$ et $\beta = -K.e_0.\tau$. D'où :

$$S(p) = K.e_0\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau.p}\right) = K.e_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right).$$

La transformée inverse de Laplace en utilisant le tableau de l'annexe donne :

$$s(t) = K.e_0.[1 - e^{-t/\tau}].H(t)$$

Fondamental : Réponse indicielle du premier ordre



Réponse indicielle d'un système du premier ordre

Cette réponse est tracée sur la figure précédente. Elle présente les propriétés suivantes :

- La pente à l'origine vaut $K.e_0/\tau$. Cette pente non nulle à l'origine est typique d'un premier ordre.
- La valeur à convergence (quand $t \longrightarrow \infty$) vaut $K.e_0$ (réponse statique ou permanente).
- Pour $t = \tau, s(\tau) = K.e_0.(1 - e^{-1}) \approx 0,63.K.e_0$
- Pour $t = 3.\tau, s(3.\tau) = K.e_0.(1 - e^{-3}) \approx 0,95.K.e_0$ (valeur à convergence moins 5%)

K, le gain statique, représente l'amplification entre l'entrée et la sortie, alors que τ, la constante de temps, contrôle le taux de croissance de l'exponentielle.

Méthode : Prévoir la réponse indicielle à partir de la F.T

1. Vérifier l'ordre de la F.T.
2. Mettre sous forme canonique la F.T : $\dfrac{K}{1+\tau.p}$
3. Identifier K et en déduire la valeur finale : $s_\infty = K.e_0$
4. Identifier la constante de temps τ et en déduire le temps de réponse à 5% $t_{r5\%} = 3.\tau$
5. Connaître l'allure de la courbe. (Pente non nulle à l'origine).

Lorsque la courbe expérimentale de la réponse d'un système à une entrée en échelon est similaire à la réponse d'un premier ordre, il est possible d'identifier les coefficients K et τ à l'aide de la valeur à convergence s_∞ (pour K) et de la tangente à l'origine ou des temps à 63% et 95% de la réponse à convergence (pour τ).

Méthode : Identifier la F.T à partir de la réponse temporelle

1. Reconnaître une réponse indicielle du 1er ordre. (Pente non nulle à l'origine).
2. Relever la valeur finale et calculer $K = \dfrac{s_\infty}{e_0}$
3. Relever le temps de réponse à 5% et en déduire $\tau = \dfrac{t_{r5\%}}{3}$ ou bien relever la valeur de τ pour $0,63 \cdot s_\infty$
4. En déduire $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau.p}$

Remarque

Utiliser la tangente à l'origine pour identifier le temps caractéristique est fortement déconseillé dans le cas d'une identification à partir d'une réponse expérimentale à cause des bruits de mesure.

3. Réponse impulsionnelle (réponse à un dirac)

Les développements pour le cas du dirac sont particulièrement simples.

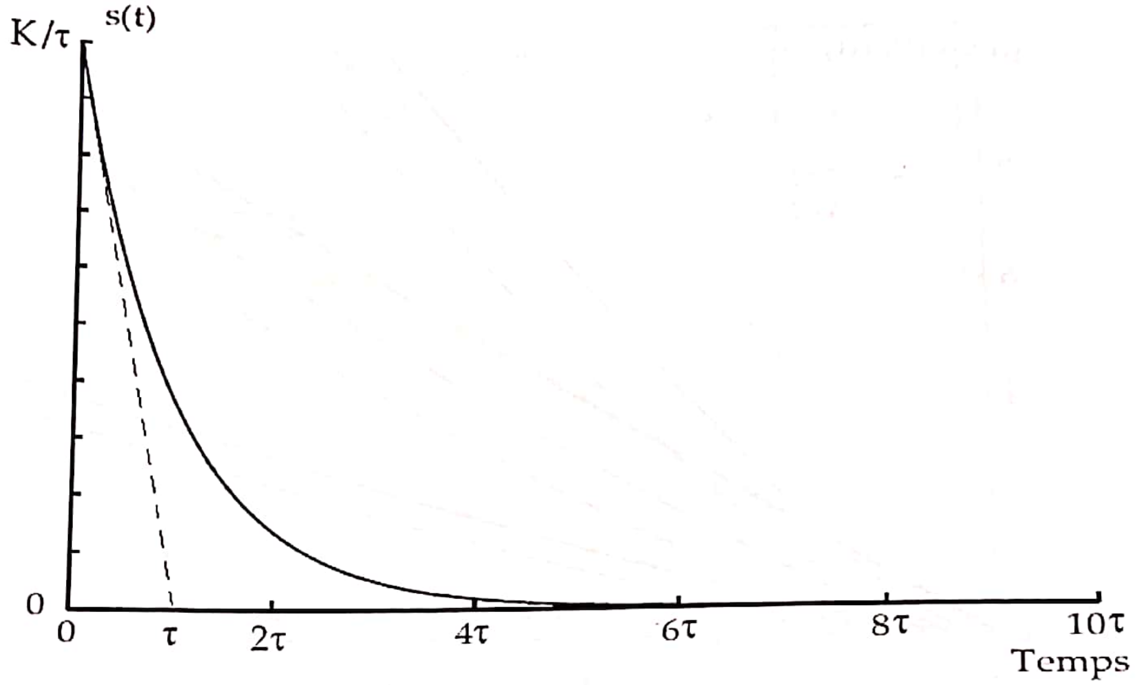
La transformée de Laplace d'un signal d'entrée tel que $e(t) = \delta(t)$ (dirac) est la fonction E(p)=1. La réponse du système dans le domaine de Laplace puis dans le domaine temporelle est donc la suivante :

$$S(p) = 1.\frac{K}{1+\tau \cdot p}$$

d'où :

$$s(t) = \frac{K}{\tau}.e^{-t/\tau}.H(t)$$

Fondamental : Réponse impulsionelle du premier ordre



Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

Cette réponse est tracée sur la figure ci-dessus et présente les propriétés suivantes :

- La valeur à l'origine vaut K/τ.
- La valeur à convergence (quand $t \longrightarrow \infty$) est nulle (réponse statique ou permanente nulle)
- La tangente à l'origine vaut $-K/\tau^2$ et coupe l'axe des temps en $t = \tau$

4. Réponse à une rampe non unitaire

La méthode poursuivie est la même que pour la réponse à un échelon ou un dirac : écriture de $e(t)$ en temporel, passage dans le domaine de Laplace, calcul de la sortie en Laplace puis, après décomposition en éléments simples, retour en temporel.

L'entrée sous forme de rampe unitaire s'écrit : $e(t) = e_0.t.H(t)$, d'où $E(p) = e_0/p^2$.

La sortie, dans le domaine de Laplace, vaut donc :

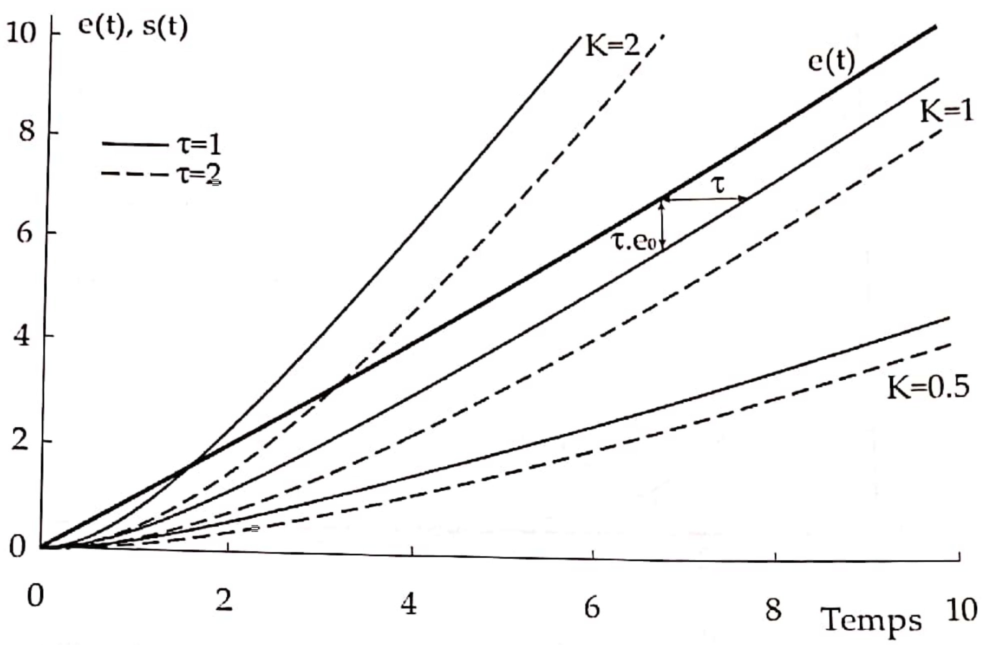
$$S(p) = \frac{e_0}{p^2} \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On peut donc proposer la décomposition en éléments simples suivante : $S(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{p^2} + \dfrac{\gamma}{1 + \tau.p}$

D'où, toujours par identification : $S(p) = K.e_0.\left[\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{\tau}{p} + \dfrac{\tau^2}{1 + \tau.p}\right]$

La transformée inverse de Laplace est alors la suivante : $s(t) = K \cdot e_0 \cdot [t - \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau}] \cdot H(t)$

Fondamental : réponse à une rampe



Réponse à une rampe unitaire d'un système du premier ordre

Cette réponse est tracée sur la figure ci-dessus et présente les propriétés suivantes :

- La valeur à l'origine est nulle
- La pente à l'origine est nulle
- L'asymptote quand $t \longrightarrow \infty$ vaut $K.e_0.(t-\tau)$ et cette asymptote coupe l'axe des abscisses en $t=\tau$

Dans le cas particulier où $K=1$, l'asymptote est parallèle à la consigne et il est alors possible de définir une erreur en vitesse (ou encore erreur de trainée ou erreur de poursuite) entre la consigne et la réponse. Cette erreur de vitesse vaut $\tau.e_0$.

5. Exercice : Prévoir la réponse indicielle à partir de la F.T

Question

[solution n°2 p.30*]*

Tracer, en plaçant les valeurs particulières, la réponse indicielle à un échelon unitaire du système ayant pour F. T :

$$H(p) = \frac{10}{2+4.p}$$

$H(p) = \frac{5}{1+2p}$

$\longrightarrow S(p) = \frac{e_0}{p} \cdot \frac{5}{1+2p} = \frac{5e_0}{p} - \frac{10e_0}{1+2p} \rightarrow s(t) = 5e_0 - 5e_0 e^{-\frac{t}{2}}$

$\alpha = 5e_0$
$\beta = -10e_0$

$= 5e_0(1-e^{-\frac{t}{2}})$

6. Exercice : Identifier la F.T à partir de la réponse temporelle

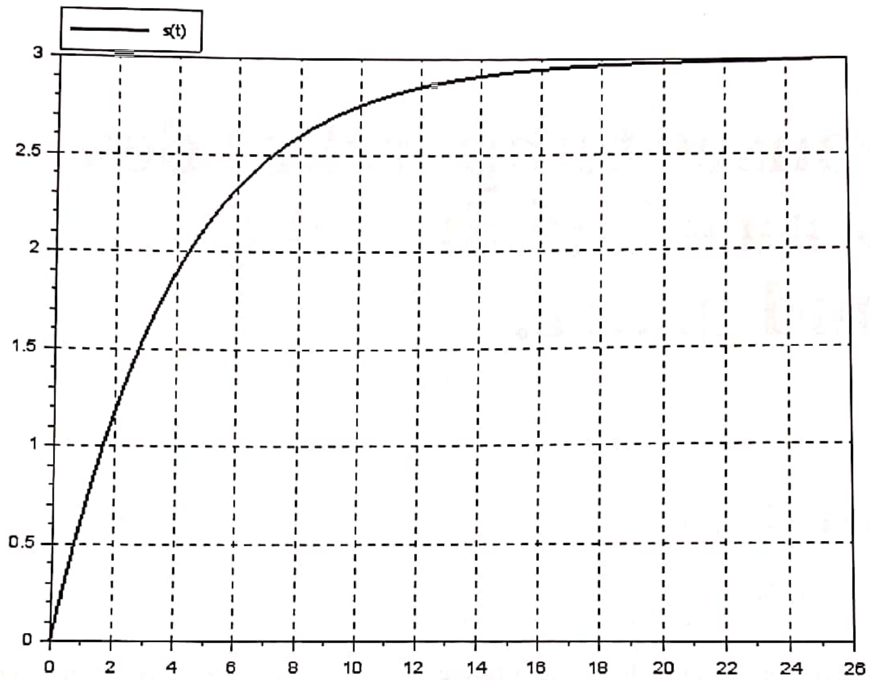
La réponse d'un système électrique a l'allure suivante lorsqu'une tension en échelon $e(t) = 2V$ est appliquée à son entrée.

$s_\infty = 5e_0$

$s(T_0) = \frac{5}{2}e_0$

$\tau = 2s$

$t_{5\%} = 6s$



$H(p) = \frac{k}{1+\tau p}$ $\tau = 4$ $k = \frac{3}{2}$ $H(p) = \frac{\frac{3}{2}}{1+4p}$

Réponse indicielle

$\boxed{H(p) = \frac{3}{1+8p}}$

Question

[solution n°3 p.30*]*

En déduire la fonction de transfert du système.

Indice :

Relever la valeur finale et le temps de réponse à 5%.

Réponses temporelles des systèmes linéaires du second ordre.

III

1. introduction

Équation temporelle

Le comportement d'un système du second ordre est caractérisé par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$s(t) + \frac{2.\xi}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = K.e(t)$$

Avec K, ξ et ω_0 les constantes caractéristiques du comportement du système :

- K = gain statique , son unité dépendant des grandeurs d'entrée et sortie du système]
- ξ = coefficient d'amortissement ($\xi > 0$), sans unité
- ω_0 = pulsation naturelle ou pulsation propre non amortie ($\omega_0 > 0$), en rad.s^{-1}

Fonction de transfert

La transformée de Laplace conduit, lorsque les conditions initiales sont toutes nulles, à :

$$S(p) + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p \cdot S(p) + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 \cdot S(p) = K.E(p)$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Cette forme de la fonction de transfert est appelée forme canonique (forme pour laquelle le monôme de degré zéro du polynôme du dénominateur vaut 1). Ses paramètres caractéristiques sont K, ξ et ω_0.

Réponse indicielle à un échelon non unitaire

Les trois entrées types (échelon, dirac et rampe) peuvent être envisagées mais seule l'entrée en échelon (réponse indicielle) sera approfondie ici.

La réponse indicielle est la réponse à une entrée en échelon unitaire $e(t) = e_0.H(t)$. D'où $E(p) = e_0/p$ et :

$$S(p) = \frac{e_0}{p} \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$S(p) = \frac{e_0}{p} \cdot \frac{K \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + p^2}$$

Le but est de déterminer la sortie dans le domaine temporel. La sortie dans le domaine de Laplace ($S(p)$) permet, par identification inverse, de déterminer la sortie temporelle.

La transformée de Laplace inverse de la sortie se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. Il faut préalablement la décomposer en éléments simples pour faire apparaître les éléments du tableau. La décomposition en éléments simples passe en premier lieu par la recherche des racines du dénominateur de la fonction $S(p)$.

On trouve la racine p= 0 ainsi que les racines du polynôme du second degré $\omega_0^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + p^2 = 0$ appelé équation caractéristique. Les racines dépendent du signe du discriminant $\Delta = 4\omega_0^2.(\xi^2 - 1)$.

Il est donc nécessaire de distinguer trois cas, selon la valeur du coefficient d'amortissement ξ :

- Si l'amortissement est important ($\xi > 1$), alors $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles : $p = -\xi.\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$
- Si l'amortissement est critique ($\xi = 1$), alors $\Delta = 0$ et il y a une racine réelle double : $p = -\xi \cdot \omega_0 = -\omega_0$
- Si l'amortissement est faible ($\xi < 1$), alors $\Delta < 0$ et il y a deux racines complexes : $p = -\xi \cdot \omega_0 \pm j \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$

2. Réponse indicielle pour un système sur-amorti : régime apériodique

Lorsque $\xi > 1$, le dénominateur possède deux racines réelles.

La forme canonique de la fonction de transfert devient :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

2 pôles réels :

$$p_1 = \omega_0(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$$

$$p_2 = \omega_0(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

Auxquels correspondent 2 constantes de temps :

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_2} = \frac{1}{\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

La réponse du système à l'entrée en échelon non unitaire dans le domaine de Laplace s'écrit donc :

$$S(p) = \frac{e_0}{p} \cdot \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

Après décomposition en éléments simples on obtient :

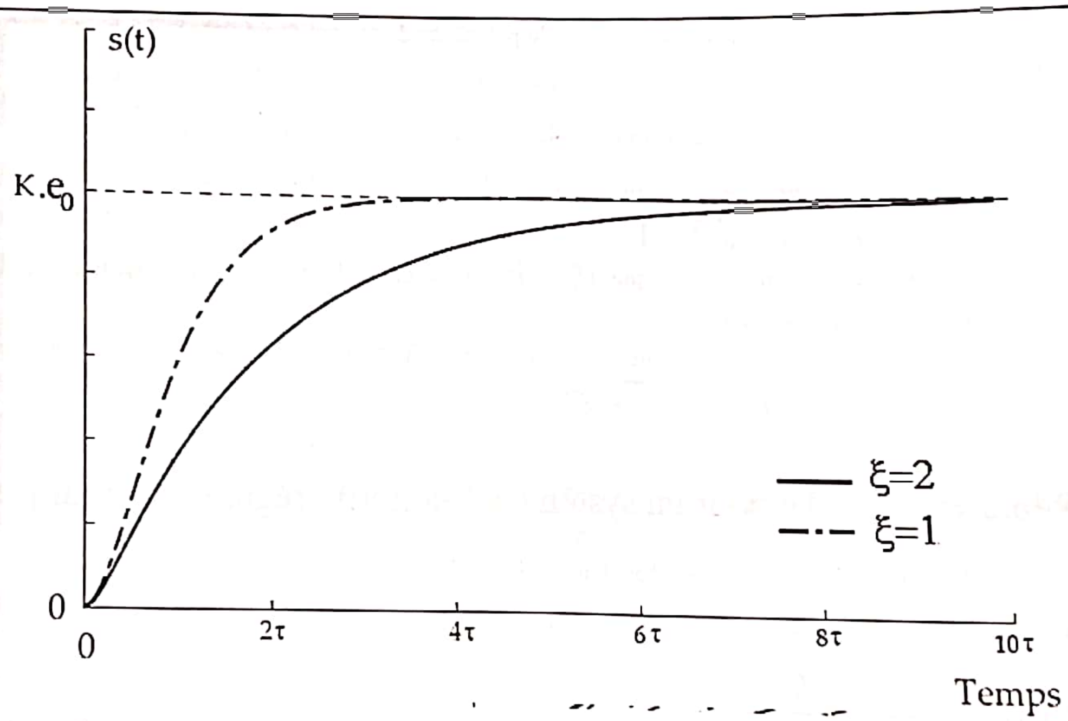
$$S(p) = K.e_0\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\frac{1}{p + 1/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\frac{1}{p + 1/\tau_2}\right)$$

La transformée inverse de Laplace donne alors l'expression de la réponse indicielle suivante :

$$s(t) = K.e_0\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}e^{-t/\tau_2}\right)$$

La réponse est la somme d'une constante représentant la réponse permanente et de deux exponentielles représentant les réponses transitoires. Selon les valeurs respectives des temps de réponse τ_1 et τ_2, l'influence de l'une de ces deux réponses transitoires peut parfois être négligeable.

Fondamental



Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique (amortissement fort, ξ>1) et en régime critique (amortissement ξ=1)

Cette réponse indicielle, appelée *réponse apériodique* du système est tracée sur la figure ci-dessus (en trait continu, pour une valeur de ξ=2).

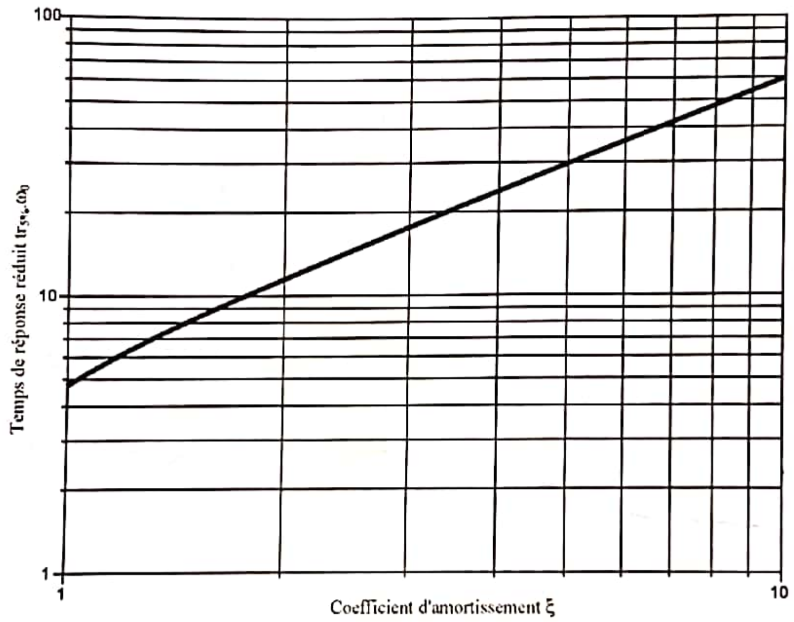
La réponse apériodique présente les propriétés suivantes :

- La valeur à convergence s_∞ (quand $t \to \infty$) vaut $K.e_0$
- La valeur à l'origine est nulle
- La pente à l'origine est nulle (principale différence avec la réponse indicielle du premier ordre) • Quelle que soit la valeur de $\xi > 1$, la réponse ne présente pas de dépassement
- Plus l'amortissement ξ est élevé et plus le temps de réponse du système est lent.

Méthode : Prévoir la réponse indicielle à partir de la F.T

1. Vérifier l'ordre de la F.T.

2. Mettre sous forme canonique la F.T : $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$
3. Identifier ξ et vérifier $\xi > 1$
4. Mettre la F.T sous la forme canonique $H(p) = \dfrac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$ pour identifier les constantes de temps.
5. Identifier K et en déduire la valeur finale : $s_\infty = K.e_0$
6. Identifier la pulsation propre ω_0 et en déduire le temps de réponse à 5% à l'aide de l'abaque ci-dessous qui donne le temps de réponse réduit ($tr_{5\%} \cdot \omega_0$) en fonction de ξ.
7. Connaître l'allure de la courbe. (Pente nulle à l'origine).



Remarque

On ne peut pas identifier une F.T à partir d'une réponse indicielle pour $\xi > 1$ avec cet abaque. L'abaque nécessite de connaître soit la valeur de ξ, soit la valeur de ω_0.

Il existe toutefois d'autres méthodes et abaques permettant d'identifier ces F.T.

Fondamental : Cas où l'une des constantes de temps est beaucoup plus grande que l'autre

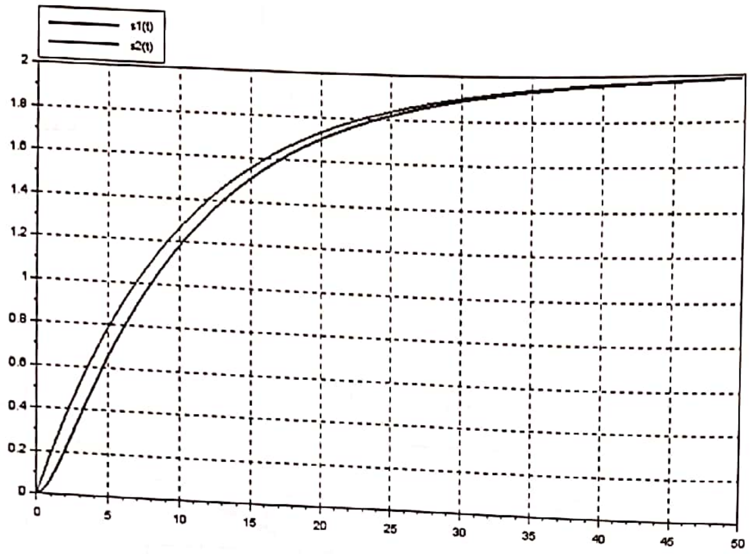
SI $\tau_1 \gg \tau_2$, dans ce cas c'est la constante de temps la plus grande qui l'emporte. Il est alors possible d'avoir une approximation du temps de réponse à 5% : $t_{r5\%} \simeq 3\tau_1$.

De plus, la fonction de transfert peut être approximée par une F.T du premier ordre :

$$H(p) \simeq \frac{K}{1 + \tau_1.p}$$

Exemple

Tracés des réponses indicielle de $H_1(p) = \dfrac{2}{(1+10\cdot p)\cdot(1+p)}$ et $H_2(p) = \dfrac{2}{(1+10\cdot p)}$ pour un échelon unitaire.



Comparaison des réponses indicielles

$z_1 = \frac{3-2\sqrt2}{2(9-8)} = \frac{3}{2}-\sqrt2$

$z_2 = \frac{3+2\sqrt2}{2(9-8)} = \frac{3}{2}+\sqrt2 \simeq 2{,}9$

$H(p) = \frac{K}{(1+z_1 p)(1+z_2 p)}$

$z_1 = \frac{1}{2(3+2\sqrt2)}$

$z_1 = \frac{1}{2(3+\sqrt{5-1})}$

$z_2 = \frac{1}{2(3-\sqrt{5-1})}$

$\frac{K\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}$

3. Exercice : Identifier la F.T à partir de la réponse temporelle

Question

Tracer, en plaçant les valeurs particulières, la réponse indicielle à un échelon unitaire du système ayant pour F. T : *[solution* n°4 p.31*]*

$$H(p) = \frac{6}{3+9.p+\frac{3}{4}.p^2}$$

$\frac{2\xi}{\omega_0} = 9$ $\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2-1)$ $K=2$

$\frac{2\xi}{\omega_0} = 3$ $\omega_0 = 2$ $\xi = 3$

$\frac{2}{1+3p+\frac{1}{4}p^2}$ $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{4}$

$0{,}63K \to z_2$

$0{,}95K \to 3z_2$

$p = \omega_0(-\xi \pm \sqrt{\xi^2-1})$

$z_1 = \frac{1}{\omega_0(\xi+\sqrt{\xi^2-1})}$

$z_2 = \frac{1}{\omega_0(\xi-\sqrt{\xi^2-1})}$

4. Réponse indicielle pour un système en régime apériodique critique.

Lorsque $\xi = 1$, le dénominateur possède une racine double.

La forme canonique de la fonction de transfert devient :

$$H(p) = \frac{K}{(1+\tau\cdot p)^2}$$

1 pôle double :

$p_0 = -\omega_0$

Auquel correspond une constante de temps :

$$\tau = -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\omega_0}$$

La réponse indicielle du système est, dans le domaine de Laplace : $S(p) = \dfrac{K \cdot \omega_0^2}{(p+\omega_0)^2} \cdot \dfrac{e_0}{p}$

On la décompose en éléments simples $S(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{p+\omega_0} + \dfrac{\gamma}{(p+\omega_0)^2}$

L'identification des constantes donne:

- $\alpha = K.e_0$
- $\beta = -K.e_0$
- $\gamma = -K \cdot \omega_0 \cdot e_0$

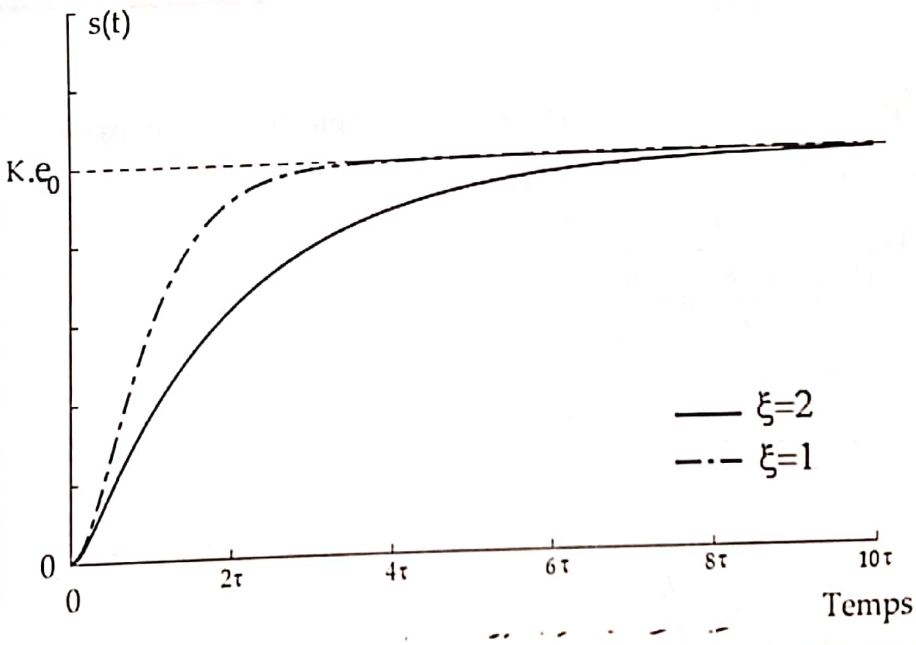
D'où l'expression de la fonction S(p), puis, par transformation de Laplace inverse, celle de $s(t)$:

$$S(p) = K.e_0.\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\omega_0} + -\frac{\omega_0}{(p+\omega_0)^2}\right]$$

Le théorème du retard dans le domaine de Laplace (si $G(p) = F(p+\omega_0\ )$" alors " $L^{-1}[G(p)] = g(t) = e^{\omega_0.t}.f(t))$ permet d'obtenir :

$$s_(t) = K \cdot e_0\left(1 - e^{-\omega_0 \cdot t}\left(1 + \underset{t}{\omega_0}\right)\right) = K \cdot e_0\left(1 - e^{-t/\tau}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Fondamental



Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique (amortissement fort, ξ>1) et en régime critique (amortissement ξ=1)

Cette réponse, appelée réponse apériodique critique du système du second ordre est tracée sur la figure ci-dessus (en traits interrompus). Elle est comparée à la réponse apériodique pour la valeur de ξ=2.

La réponse apériodique critique présente les propriétés suivantes :

- La valeur à convergence vaut $K.e_0$
- La valeur à l'origine est nulle
- La pente à l'origine est nulle (principale différence avec la réponse indicielle du premier ordre)
- La réponse ne présente pas de dépassement.

Méthode : Prévoir la réponse indicielle à partir de la F.T

1. Vérifier l'ordre de la F.T.
2. Mettre sous forme canonique la F.T : $H(p) = \dfrac{K}{(1+\tau p)^2} = \dfrac{K}{\left(1+\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2}$
3. Identifier ξ et vérifier $\xi = 1$
4. Identifier K et en déduire la valeur finale : $s_\infty = K.E_0$
5. Identifier la pulsation propre ω_0 ou la constante de temps et en déduire le temps de réponse à 5% $tr_{5\%} = 4,7\tau = \dfrac{4,7}{\omega_0}$.
6. Connaître l'allure de la courbe. (Pente nulle à l'origine).

5. Exercice : Identifier la F.T à partir de la réponse temporelle

Question

[solution n°5 p.31]

Tracer, en plaçant les valeurs particulières, la réponse indicielle à un échelon unitaire du système ayant pour F. T :

$$H(p) = \frac{4}{2+8p+8p^2}$$

$H(p) = \dfrac{2}{1+4p+4p^2} = \dfrac{2}{(1+2p)^2}$ $2 \rightarrow K$; 2

$2 = \dfrac{1}{\omega_0}$ $\dfrac{2\xi}{\omega_0} = 2\cdot 2\xi \rightarrow \xi = 1$

SV → 2

$t_{r5\%} = 4,7 \cdot 2 = 9,4\,s$

6. Réponse indicielle pour un système sous-amorti : régime pseudo-périodique

Lorsque $\xi < 1$, la forme canonique de la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \dfrac{2\cdot\xi}{\omega_0}\cdot p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

2 pôles complexes conjugués :

- $p_1 = \omega_0(-\xi + j\sqrt{1-\xi^2})$
- $p_2 = \omega_0(-\xi - j\sqrt{1-\xi^2})$

La réponse du système à l'entrée en échelon non unitaire dans le domaine de Laplace s'écrit donc :

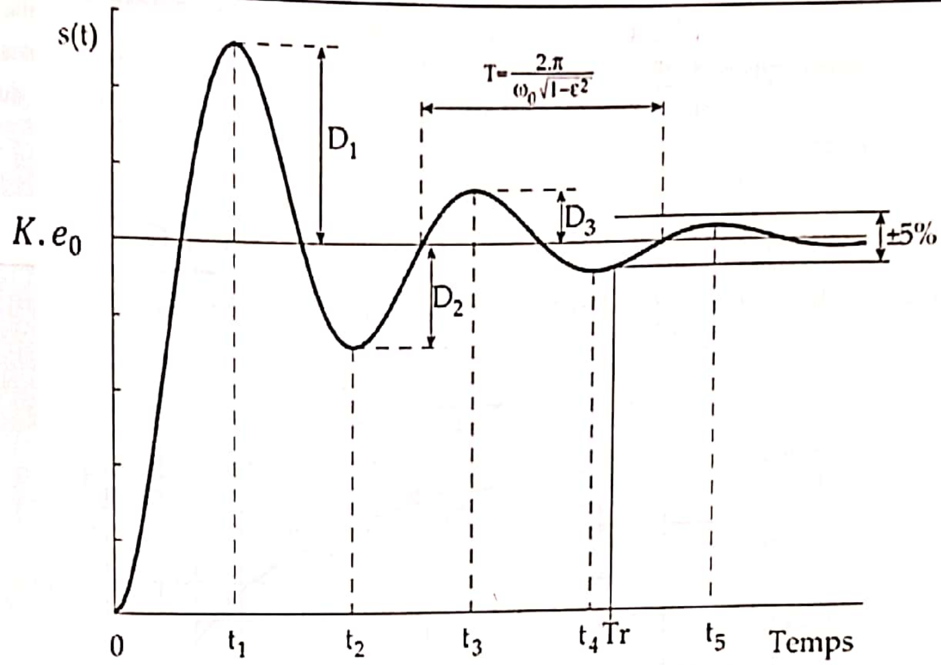
$$S(p) = \frac{e_0}{p}\cdot\frac{K}{1 + \dfrac{2\cdot\xi}{\omega_0}\cdot p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Après une décomposition en éléments simples et une transformée inverse de Laplace on obtient l'expression de la réponse indicielle suivante (démonstration en annexe) :

$$s(t) = K.e_0.\left(1 - \frac{e^{-\xi\cdot\omega_0\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega_p\cdot t + \psi)\right)$$

avec $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ en $rad.s^{-1}$ et $\psi = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$.

Fondamental



Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique (amortissement faible, ξ<1)

Cette réponse, appelée réponse *pseudo-périodique*, est tracée sur la figure ci-dessus.

La réponse pseudo-périodique présente les propriétés suivantes :

- Il s'agit d'une fonction oscillante (partie sinusoïdale) amortie (partie exponentielle décroissante)
- La valeur à convergence vaut $K.e_0$
- La valeur à l'origine est nulle
- La pente à l'origine est nulle, comme pour toute autre valeur de ξ
- $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ (en $rad.s^{-1}$) est appelée pseudo-pulsation du système amorti ($T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$ en secondes est appelé pseudo-période)

Propriétés (à titre indicatif)

La valeur du premier dépassement relativement à la valeur finale est donnée par :

$D_{1\%} = \dfrac{D_1}{s_\infty} = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ On remarque due le premier dépassement ne dépend que de ξ.

Le premier dépassement à lieu au bout d'une demi pseudo-période :

$$t_1 = \frac{Tp}{2} = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

Le temps de réponse à 5% est approximativement :

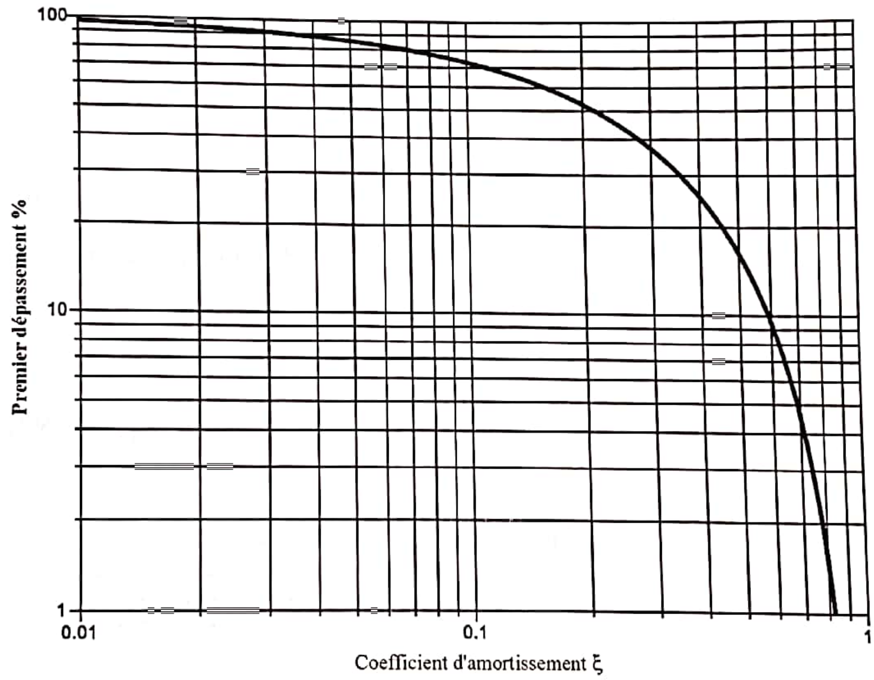
$$t_{r5\%} = -\frac{1}{\xi\omega_0}\cdot\ln(0.05\sqrt{1-\xi^2})$$

Remarques sur la rapidité et le dépassement des systèmes du second ordre :

À partir de l'expression de la réponse indicielle des systèmes standards du second ordre, telle qu'elle a été exprimée précédemment, il est possible de tracer les deux abaques des figures ci-dessous, donnant l'évolution du temps de réponse réduit ($tr_{5\%}.\omega_0$) et du premier dépassement (D_1) en fonction du coefficient d'amortissement.

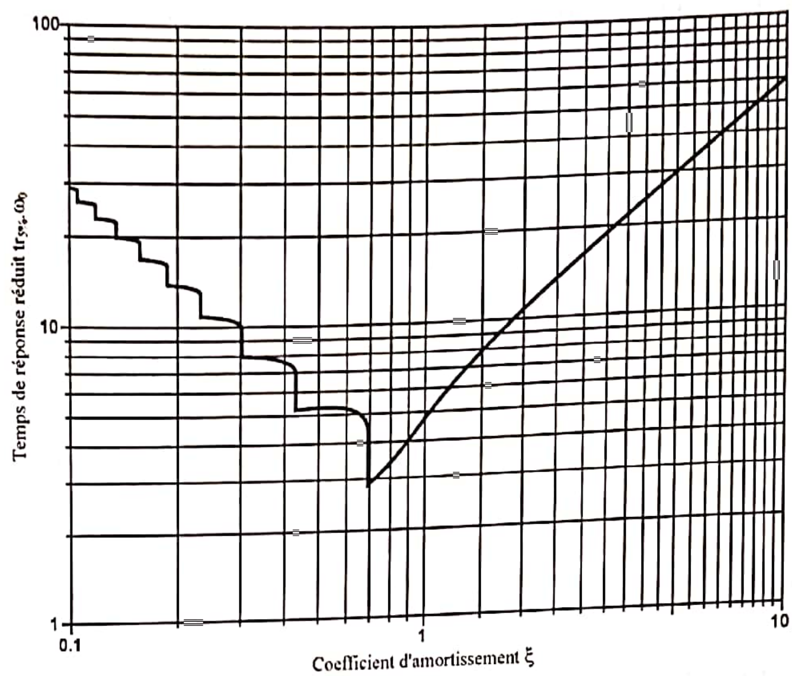
Remarque

L'abaque suivant permet de retrouver $D1_\%$ en fonction de ξ et vice et versa:



Remarque

L'abaque suivant permet de retrouver le temps de réponse réduit en fonction de ξ et vice et versa. Le temps de réponse réduit correspond au produit $tr_{5\%}.\omega_0$



Réponse la plus rapide.

Sur l'abaque qui donne le temps de réponse réduit en fonction de ξ, on constate que pour ω_0 constant, la réponse la plus rapide est obtenue pour $\xi = 0,69(0,7)$ et que dans ce cas :

- $D_{1\%} = 5\%$
- $tr_{5\%} = t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_p} = \dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

Méthode : Prévoir la réponse indicielle à partir de la F.T

1. Vérifier l'ordre de la F.T.
2. Mettre sous forme canonique la F.T : $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\cdot\xi}{\omega_0}\cdot p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$
3. Identifier ξ et vérifier $\xi < 1$
4. Identifier K et en déduire la valeur finale : $s_\infty = K.e_0$
5. Identifier la pulsation propre ω_0.
6. Identifier ξ et en déduire la valeur du premier dépassement ainsi que le temps de réponse à 5% à l'aide des abaques ci-dessus.
7. Calculer l'instant du premier dépassement t_1.
8. Connaître l'allure de la courbe. (Pente nulle à l'origine).

Méthode : Identifier la F.T à partir de la réponse temporelle

1. Reconnaître une réponse indicielle du 2nd ordre avec $\xi < 1$. (Oscillations).

2. Relever la valeur finale et calculer $K = \frac{s_\infty}{E_0}$
3. Relever la valeur du premier dépassement par rapport à la valeur finale et en déduire ξ en utilisant l'abaque.
4. Relever le temps de réponse à 5% et en déduire ω_0 à l'aide de l'abaque ou bien relever t_1 et en déduire ω_0.
5. En déduire $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$

7. Exercice : Prévoir la réponse indicielle à partir de la F.T

Question

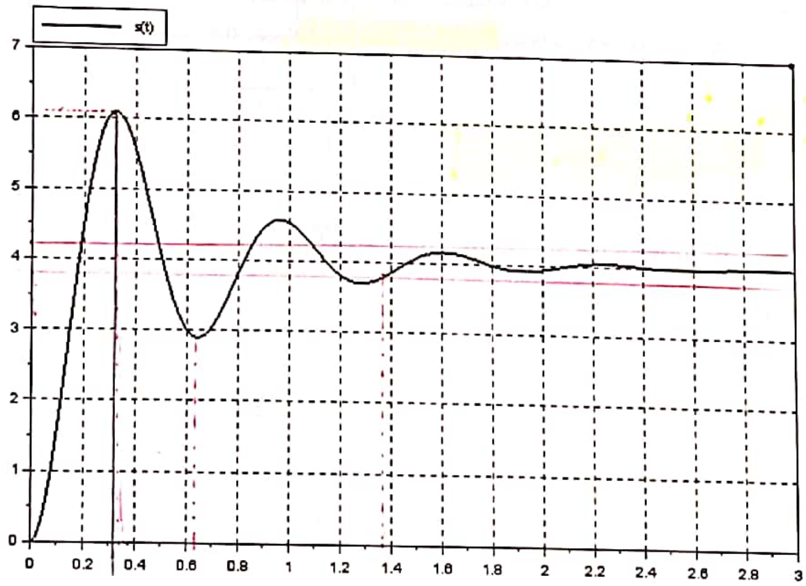
[solution n°6 p.32]

Tracer, en plaçant les valeurs particulières, la réponse indicielle à un échelon unitaire du système ayant pour F. T :

$$H(p) = \frac{3}{1 + p + p^2}$$

8. Exercice : Identifier la F.T à partir de la réponse temporelle

La réponse en vitesse de rotation d'un système mécanique a l'allure suivante lorsqu'un couple en échelon $e(t) = 2N.m$ est appliquée à son entrée.



Réponse indicielle

Question

[solution n°7 p.33]

En déduire la fonction de transfert du système.

* *

*

Conclusions concernant la rapidité et le dépassement des systèmes du second ordre standard :

- Dans le cas où le système ne peut admettre aucun dépassement, le fonctionnement avec amortissement critique $\xi = 1$ présente la rapidité maximale avec $tr_{5\%} = 4,7\tau$.
- Dans le cas où le cahier des charges autorise un dépassement supérieur ou égal à 5%, le système le plus rapide est obtenu pour un amortissement $\xi \approx 0,69$. Cette valeur d'amortissement représente souvent le meilleur compromis entre la rapidité du système et la limitation du dépassement. Cependant, elle ne pourra en aucun cas être utilisée sur les systèmes pour lesquels un fonctionnement sans dépassement est attendu. Cette valeur est à connaître.

Annexes

IV

1. Tableau de transformées de Laplace

Transformées de Laplace à connaître parfaitement

Nom	$f(t)$	$F(p)$	pôle de $F(p)$
Dirac	$\delta(t)$	1	Aucun
Echelon	$e_0.H(t)$	$\frac{e_0}{p}$	0
Rampe	$e_0.t.H(t)$	$\frac{e_0}{p^2}$	0 (double)
Exponentielle	$e_0.e^{-a.t}.H(t)$	$\frac{e_0}{p+a}$	-a

Autres transformées de Laplace (à ne pas connaître, ces transformées seront données si nécessaires)

Nom	$f(t)$	$F(p)$	pôle de $F(p)$
Fonction puissance	$e_0.t^n.H(t)$	$e_0.\frac{n\,!}{p^{n+1}}$	0 (d'ordre n+1)
	$e_0.t.e^{-a.t}.H(t)$	$\frac{e_0}{(p+a)^2}$	$-a$ (double)
Cosinus	$e_0.\cos(\omega.t).H(t)$	$e_0 \cdot \frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\pm j\omega$
Sinus	$e_0.\sin(\omega.t).H(t)$	$e_0 \cdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\pm j\omega$
Cosinus amorti	$e_0.e^{-a.t}.\cos(\omega.t).H(t)$	$e_0 \cdot \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$-a \pm j\omega$
Sinus amorti	$e_0.e^{-a.t}.\sin(\omega.t).H(t)$	$e_0 \cdot \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$-a \pm j\omega$

- e_0 et a sont des constantes réelles
- j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$

2. Démonstration : Calcul de la réponse indicielle d'un système du second ordre sous amorti

Complément : Démonstration

La fonction de transfert possède 2 pôles complexes conjugués :

- $p_1 = \omega_0(-\xi + j\sqrt{1-\xi^2})$
- $p_2 = \omega_0(-\xi - j\sqrt{1-\xi^2})$

Calcul de S_{ind} :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\cdot\xi}{\omega_0}\cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{e_0}{p}$$

$$S(p) = \frac{K.e_0.\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-\overline{p_1})} = K..E_0.\omega_0^2\left(\frac{1}{p_1\overline{p_1}\cdot p} + \frac{1}{p_1(p_1-\overline{p_1})(p-p_1)} - \frac{1}{\overline{p_1}(p_1-\overline{p_1})(p-\overline{p_1})}\right)$$

or

$$(p_1 - \overline{p_1}) = 2j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \text{ et } p_1\overline{p_1} = \omega_0^2,$$

ce qui donne :

$$S(p) = K.Ee_0.\omega_0^2\left(\frac{1}{\omega_0^2\cdot p} + \frac{1}{2j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}p_1(p-p_1)} - \frac{1}{2j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\overline{p_1}(p-\overline{p_1})}\right)$$

En utilisant la forme polaire de p_1, $p_1 = \omega_0 \cdot e^{j\varphi}$, l'expression devient :

$$S(p) = K.\omega_0^2.e_0\left(\frac{1}{\omega_0^2\cdot p} + \frac{e^{-j\varphi}}{2j\omega_0^2\sqrt{1-\xi^2}(p-p_1)} - \frac{e^{j\varphi}}{2j\omega_0^2\sqrt{1-\xi^2}(p-\overline{p_1})}\right)$$

L'originale de S_{ind} est donc :

$$S(t) = K.e_0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\frac{e^{-j\varphi}e^{p_1.t} - e^{j\varphi}e^{\overline{p_1}.t}}{2j}\right)$$

En utilisant la pseudo pulsation :

$$S(t) = K.e_0\left(1 + \frac{e^{-\xi\cdot\omega_0\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\frac{e^{j(\omega_p.t-\varphi)} - e^{-j(\omega_p.t-\varphi)}}{2j}\right)$$

$$S(t) = K.e_0\left(1 + \frac{e^{-\xi\cdot\omega_0\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot sin(\omega_p.t-\varphi)\right)$$

En définissant $\psi = \pi - \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$:

$$sin(\omega_p.t-\varphi) = sin(\omega_p.t+\psi)$$

Et donc :

$$s(t) = K.e_0.\left(1 - \frac{e^{-\xi\cdot\omega_0\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega_p t+\psi)\right)$$

Solutions des exercices

> Solution n°1

Exercice p. 9

$$\epsilon(p) = E(p) - 2.S(p) = E(p) - 2 \cdot \frac{1}{1+3p} \cdot \epsilon(p)$$

$$\left(\frac{2}{1+3p} + 1\right) \cdot \epsilon(p) = E(p)$$

$$\epsilon(p) = \frac{1+3.p}{3+3.p} \cdot E(p)$$

On applique le théorème de la valeur finale avec $E(p) = \frac{e_0}{p}$

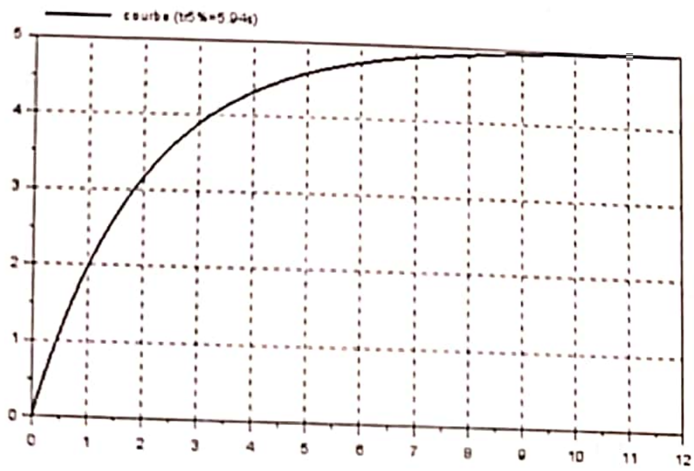
$$\epsilon_0 = \lim_{p\to 0} \frac{1+3.p}{3+3.p} \cdot \frac{e_0}{p} = \frac{e_0}{3}$$

On en déduit :

$$\epsilon_{0\%} = \frac{1}{3} \cdot 100 = 33\%$$

> Solution n°2

Exercice p. 14



Répose indicielle

$$tr_{5\%} = 3 \times 2 = 6s$$

$$E(p) = \frac{1}{p} \text{ donc } \lim_{p\to 0} p.S(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{10}{2+4p}\frac{1}{p} = 5$$

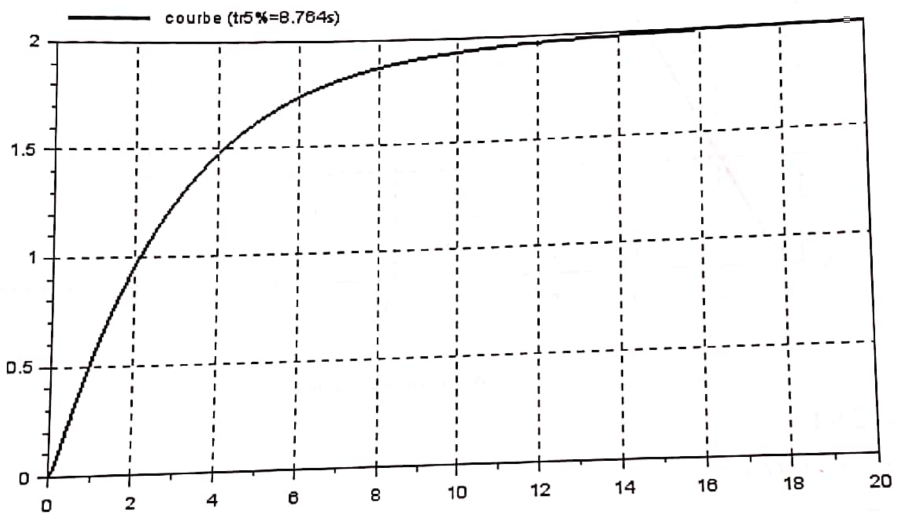
> **Solution** n°3

Exercice p. 15

$$H(p) = \frac{1,5}{1+4p}$$

> **Solution** n°4

Exercice p. 20



réponse indicielle

$K = 2$ S.I.

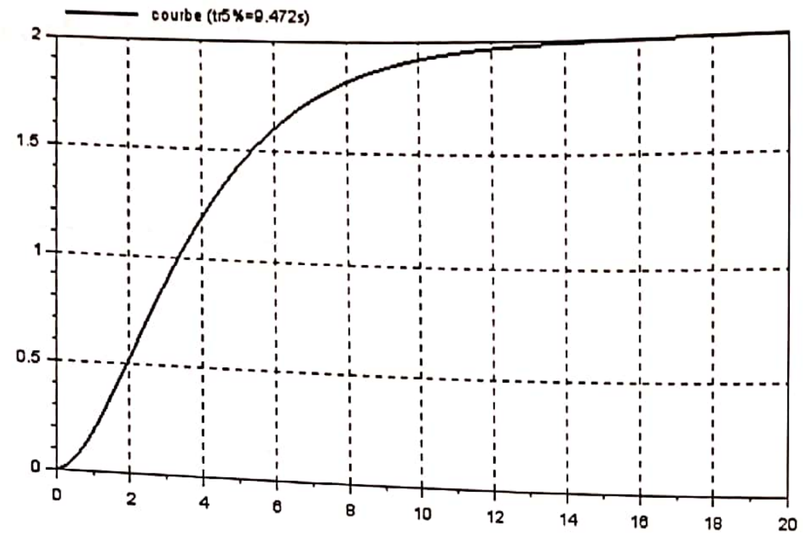
$\omega_0 = 2rd/s$

$\xi = 3$

$tr_{5\%} = 8.8s$

> **Solution** n°5

Exercice p. 22

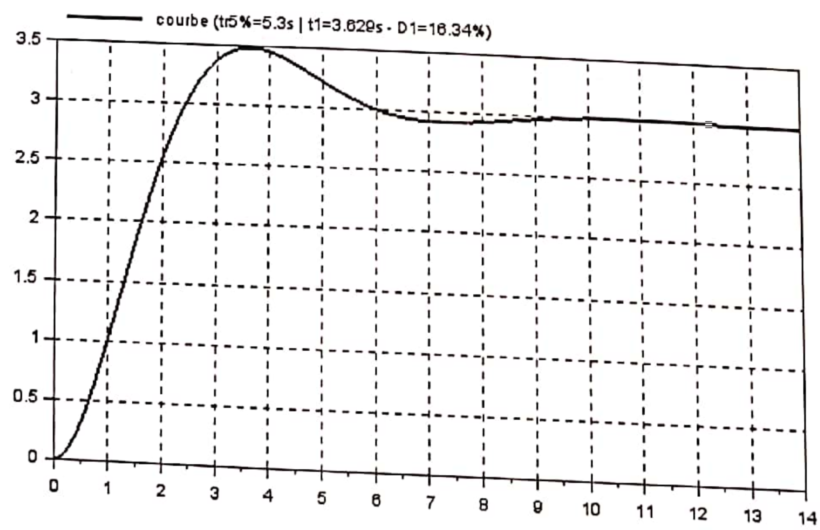


Réponse indicielle

- $K = 2$ S.I
- $\omega_0 = 0.5 rd/s$
- $\tau = 2s$
- $\xi = 1$
- $tr_{5\%} = 9.4s$

> **Solution** n°6

Exercice p. 26



Réponse indicielle

- $K = 3$ S.I
- $\omega_0 = 1 rd/s$

- $\xi = 0.5$
- $tr_{5\%} = 5.3s$
- $D_{1\%} = 16.3\%$
- $t1 = 3.62s$

> **Solution** n°7

Exercice p. 26

$$K = 4/2 = 2rd/s.Nm$$

$D_{1\%} = \dfrac{6.1 - 4}{4} = 52.5\%$ donc : $\xi = 0.2$

$t1 = 0.32s$ donc : $\omega_0 = 10rd/s$

$tr_{5\%} = 1.4s$ permet aussi de trouver ω_0

Donc

$$H(p) = \frac{2}{1 + 0.04p + \dfrac{p^2}{100}}$$